

Jacek BIAŁEK

Propozycja indeksu cen

W teorii indeksów statystycznych wyróżnić można następujące kierunki (von der Lippe, 2007):

- ujęcie aksjomatyczne, w ramach którego określamy pożądane własności matematyczne indeksów (tzw. testy) i szukamy konstrukcji indeksu, który spełniałby możliwie jak najwięcej postulatów lub przynajmniej te z nich, które mają charakter aksjomatów;
- ujęcie stochastyczne, gdzie poszukując idealnej formuły indeksu nie opieramy się na wspomnianych testach, lecz własnościach statystycznych indeksów (np. chcemy minimalizować ich zmienność mierzoną wariancją). Wspólnym ogniwem podejścia aksjomatycznego i stochastycznego jest tzw. atomistyczna teoria indeksów, zgodnie z którą uwzględnia się jedynie obserwowalne zmienne (ceny i ilości komponentów) oraz zakłada się, że ceny i ilości komponentów są od siebie niezależne;
- ujęcie czynnikowe, gdzie ceny i ilości komponentów traktuje się jako czynniki w czteropolowym planie eksperymentalnym, a następnie za pomocą analizy wariancji (ANOVA) wyznacza się rozwiązanie systemu równań minimalizującego wariancję estymatorów parametrów modelu;
- ujęcie ekonomiczne, którego geneza leży u źródła problemu pomiaru inflacji za pomocą indeksu kosztów utrzymania (COLI — *Cost of Living Index*). W przeciwieństwie do podejścia aksjomatycznego i stochastycznego nie opiera się tu jedynie na bezpośrednio obserwowalnych zmiennych (np. minimalnego kosztu utrzymania nie obserwuje się bezpośrednio) i co więcej, nie zakłada się braku zależności pomiędzy cenami i ilościami. W podejściu tym przyjmuje się, że pomiędzy cenami i ilościami istnieją wzajemne relacje wyjaśniane przez modele mikroekonomiczne;
- ujęcie Divisia, w którym szacując wartość indeksu bierze się pod uwagę nie tylko okres bazowy i badany (a więc krańce rozważanego interwału czasowego), ale również wszystkie momenty pośrednie. W literaturze przedmiotu spotkać można tu zarówno modele z czasem skokowym, jak i ciągłym (Białek, 2006, 2007).

Celem artykułu jest prezentacja autorskiego indeksu cen, który oceniany będzie z aksjomatycznego punktu widzenia. A zatem zamierzeniem autora jest konstrukcja indeksu statystycznego, który spełniałby możliwie jak najwięcej spośród pożądanych własności (aksjomatów) nazywanych przez teoretyków

indeksów *testami*. Wiadomo bowiem, że nawet powszechnie stosowane indeksy często są niedoskonałe z punktu widzenia aksjomatyki (np. indeksy Laspeyresa czy Paaschego nie spełniają testu kołowego, jak też odwróconego czasu von der Lippe (2007)). Z kolei indeksy doskonalsze pod tym względem (np. indeks Fishera czy Törnqvista) nie mają cennej interpretacji ekonomicznej (Białek, 2005). Co więcej, wątpliwość budzić może również przyjęcie przez Fishera założenia, iż prawdziwa wartość indeksu znajduje się w przedziale, którego krańce wyznaczone są przez indeksy Laspeyresa i Paaschego. W opracowaniu proponuje się więc indeks dolny i górny (wzory (1) i (2)), które faktycznie wyznaczają przedział zawierający wartość wszystkich znanych indeksów cen. Dlatego też, zdaniem autora, naturalniejszym jest przyjęcie formuły indeksu cen stanowiącej średnią geometryczną z tych właśnie indeksów (wzór (6)).

Podobnie jak wielu innych autorów, w artykule abstrahujemy od interpretacji ekonomicznej, która w zastosowaniach indeksów superlatywnych ma znaczenie drugorzędne (von der Lippe, 2007). Uzasadnieniem takiego stanowiska mogą być zastosowania tego rodzaju indeksów do pomiaru obciążenia indeksu COLI (Crawford, 1998; Cunningham, 1996; Hałka i Leszczyńska, 2011), konstruowanie indeksów giełdowych opartych na indeksach cen (np. indeks VLICI — *Value Line Composite Index*), definiowanie przeciętnej stopy zwrotu funduszy inwestycyjnych czy emerytalnych za pomocą łańcuchowych indeksów cen (Gajek, Kałuszka, 2000, 2001; Białek, 2012), czy wreszcie konstruowanie miar oceniających dynamikę OFE w przedziale czasowym (Białek, 2009; Białek, 2011). We wszystkich tych zastosowaniach głównym problemem jest zawsze wybór odpowiedniej formuły indeksu, przy czym właściwie bez znaczenia jest jego interpretacja ekonomiczna. W tego rodzaju zagadnieniach o wiele istotniejsze jest to, na ile wiernie indeks cen odzwierciedla rzeczywistość ich dynamikę. A zatem, problem poszukiwania właściwych formuł indeksów o dobrych własnościach aksjomatycznych, ale także statystycznych¹ jest nadal otwarty. Opracowanie przedstawia autorską propozycję indeksu, który może stanowić alternatywę dla indeksów superlatywnych (Fishera, Marshalla-Edgewortha czy Walsha).

AKSJOMATYKA INDEKSÓW CEN

W artykule ograniczymy rozważania do indeksów cen. Oznaczmy zatem formułę indeksu cenowego określonego dla N komponentów jako $I^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t)$, gdzie:

$P^s = [p_1^s, p_2^s, \dots, p_N^s]'$ — wektor cen dla okresu bazowego s ;

$P^t = [p_1^t, p_2^t, \dots, p_N^t]'$ — wektor cen dla okresu badanego t ;

¹ Interesuje nas np. indeks o niewielkiej zmienności mierzonej odchyleniem standardowym bądź wariancją. Tego aspektu jednak w artykule nie omawiamy, wchodzi ono bowiem w zakres tzw. ujęcia stochastycznego.

$Q^s = [q_1^s, q_2^s, \dots, q_N^s]'$ — wektor ilości dla okresu bazowego s ;

$Q^t = [q_1^t, q_2^t, \dots, q_N^t]'$ — wektor ilości dla okresu badanego t .

Postulaty dla indeksów statystycznych znaleźć można m.in. u Krzysztofiak i Luszniwicz (1997), Balk (1995) czy von der Lippe (2007). Najczęściej od indeksów agregatowych wymaga się by spełniały następujące testy:

- *proporcjonalności (proportionality test)* mówiący, iż w przypadku proporcjonalnych zmian cen wszystkich komponentów agregatowy indeks cen ulega zmianie według stałej proporcji, tzn.:

$$I^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) = k, \text{ gdzie } k = \frac{p_i^t}{p_i^s}, i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

- *liniowej homogeniczności (linear homogeneity)*:

$$I^P(Q^s, Q^t, P^s, kP^t) = kI^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t)$$

- *jednoznaczności (identity test)*, który postuluje, aby w przypadku braku zmian cen komponentów w okresie badanym w stosunku do bazowego indeks dynamiki przyjął wartość jeden (szczególny przypadek poprzedniego testu, wprowadzony przez Laspeyresa);
- *odwracalności w czasie (time reversal test)*, który narzuca aby indeks cenowy wyznaczony dla okresu bazowego s i badanego t stanowił odwrotność indeksu wyznaczonego dla okresu bazowego t i badanego s , czyli:

$$I^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \cdot I^P(Q^t, Q^s, P^t, P^s) = 1$$

- *wymiarowości cen (price dimensionality test)* orzekający, iż agregatowy indeks cen nie zmienia swej wartości liczbowej w przypadku zmiany jednostki miary jakiegokolwiek składnika cenowego:

$$I(Q^s, Q^t, cP^s, cP^t) = I(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \text{ dla } c > 0$$

- *współmierności (commensurability test)* orzekający, iż agregatowy indeks cen nie zmienia swej wartości liczbowej w przypadku zmiany jednostki miary jakiegokolwiek składnika cenowego, co można wyrazić formułą matematyczną:

$$I^P(\lambda^{-1}Q^s, \lambda^{-1}Q^t, \lambda P^s, \lambda P^t) = I^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t)$$

gdzie λ to dowolna diagonalna macierz o dodatnich wyrazach na głównej przekątnej.

W literaturze przedmiotu rozważa się tzw. *systemy minimalnych wymagań* (*systems of minimum requirements*). Wyróżnić można by tutaj system Martiniego (1992), Eichhorna i Voellera (1976) czy Olta (1996). Pierwszy z nich wydaje się być najmniej restrykcyjny, wymaga bowiem aby dobrze skonstruowany indeks spełniał przynajmniej testy jednoznaczności, współmierności i liniowej homogeniczności. W artykule podano propozycję indeksu, który spełnia wymogi wszystkich wymienionych systemów minimalnych wymagań.

PROPOZYCJA INDEKSU CEN

W ramach wprowadzonych oznaczeń zdefiniujemy *indeks dolny cen* jako:

$$I_L^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) = \frac{\sum_{i=1}^N \min(q_i^s, q_i^t) p_i^t}{\sum_{i=1}^N \max(q_i^s, q_i^t) p_i^s} \quad (1)$$

oraz *indeks górny cen* w postaci:

$$I_U^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) = \frac{\sum_{i=1}^N \max(q_i^s, q_i^t) p_i^t}{\sum_{i=1}^N \min(q_i^s, q_i^t) p_i^s} \quad (2)$$

Można zauważyć, iż zachodzi:

$$I_L^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \leq \min(I_{La}^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t), I_{Pa}^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t)) \leq \leq \max(I_{La}^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t), I_{Pa}^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t)) \leq I_U^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \quad (3)$$

gdzie $I_{La}^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t)$ oraz $I_{Pa}^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t)$ stanowią odpowiednio cenowy indeks Laspeyresa i Paaschego, tzn.:

$$I_{La}^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) = \frac{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^t}{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^s} \quad (4)$$

$$I_{Pa}^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) = \frac{\sum_{i=1}^N q_i^t p_i^t}{\sum_{i=1}^N q_i^t p_i^s} \quad (5)$$

Proponowana formuła indeksu ma postać:

$$I_B^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) = \sqrt{I_L^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \cdot I_U^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t)} \quad (6)$$

W dalszej części pracy omówimy podstawowe własności formuły (6).

WŁASNOŚCI PROPONOWANEGO INDEKSU

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$Q^t \succ Q^s$, jeżeli $\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad q_i^t \geq q_i^s$;

$Q^t \prec Q^s$, jeżeli $\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad q_i^t \leq q_i^s$.

Oznaczmy również indeks zmiany wartości agregatu jako:

$$I_W(Q^s, Q^t, P^s, P^t) = \frac{\sum_{i=1}^N q_i^t p_i^t}{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^s} \quad (7)$$

Można zauważyć, iż jeżeli $Q^t \succ Q^s$ to zachodzi:

$$I_U^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) = I_W(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \quad (8)$$

natomiast, gdy spełniona jest relacja $Q^t \prec Q^s$ otrzymujemy:

$$I_L^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) = I_W(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \quad (9)$$

W obu sytuacjach okazuje się, że:

$$I_B^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) = I_F^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \quad (10)$$

gdzie $I_F^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t)$ jest cenowym indeksem Fishera, stanowiącym średnią geometryczną z indeksów Laspeyresa i Paaschego.

Twierdzenie 1

Formuła (6) spełnia test proporcjonalności, liniowej homogeniczności, jednoznaczności, odwracalności w czasie, wymiarowości cen oraz współmierności.

Dowód

Proporcjonalność. Załóżmy, że dla pewnego dodatniego k zachodzi $P^t = kP^s$. Wówczas:

$$\begin{aligned} I_B^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) &= I_B^P(Q^s, Q^t, P^s, kP^s) = \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \min(q_i^s, q_i^t) \cdot kp_i^s}{\sum_{i=1}^N \max(q_i^s, q_i^t) p_i^s} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \max(q_i^s, q_i^t) \cdot kp_i^s}{\sum_{i=1}^N \min(q_i^s, q_i^t) p_i^s}} = \sqrt{k^2} = k \end{aligned} \quad (11)$$

Liniowa homogeniczność. Zauważmy, że dla dowolnego dodatniego k zachodzi:

$$\begin{aligned} I_B^P(Q^s, Q^t, P^s, kP^t) &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \min(q_i^s, q_i^t) \cdot kp_i^t}{\sum_{i=1}^N \max(q_i^s, q_i^t) p_i^s} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \max(q_i^s, q_i^t) \cdot kp_i^t}{\sum_{i=1}^N \min(q_i^s, q_i^t) p_i^s}} = \\ &= \sqrt{k^2} I_B^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) = k I_B^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \end{aligned} \quad (12)$$

Jednoznaczność wynika wprost z *proporcjonalności* (wystarczy przyjąć $k = 1$).

Odwracalność w czasie. Zauważmy, że zamieniając okres bazowy z badanym otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &I_B^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \cdot I_B^P(Q^t, Q^s, P^t, P^s) = \\ &= \sqrt{I_L^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \cdot I_U^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \cdot I_L^P(Q^t, Q^s, P^t, P^s) \cdot I_U^P(Q^t, Q^s, P^t, P^s)} = \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \min(q_i^s, q_i^t) p_i^t}{\sum_{i=1}^N \max(q_i^s, q_i^t) p_i^s} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \max(q_i^s, q_i^t) p_i^t}{\sum_{i=1}^N \min(q_i^s, q_i^t) p_i^s} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \min(q_i^t, q_i^s) p_i^s}{\sum_{i=1}^N \max(q_i^t, q_i^s) p_i^t} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \max(q_i^t, q_i^s) p_i^s}{\sum_{i=1}^N \min(q_i^t, q_i^s) p_i^t}} = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

Wymiarowość cen. Z definicji indeksu (6) wynika, że dla dowolnego dodatniego k mamy:

$$I_B^P(Q^s, Q^t, kP^s, kP^t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \min(q_i^s, q_i^t) k p_i^s}{\sum_{i=1}^N \max(q_i^s, q_i^t) k p_i^s} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \max(q_i^s, q_i^t) k p_i^s}{\sum_{i=1}^N \min(q_i^s, q_i^t) k p_i^s}} = I_B^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \quad (14)$$

Współmierność. Niech λ będzie dowolną diagonalną macierzą o wymiarach $N \times N$ i nieujemnych wyrazach, natomiast λ^{-1} będzie macierzą do niej odwrotną, tzn.:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_N \end{bmatrix}, \quad \lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_N^{-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Zauważmy, że prawdziwa jest równość:

$$\begin{aligned} I_B^P(\lambda^{-1}Q^s, \lambda^{-1}Q^t, \lambda P^s, \lambda P^t) &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \min(\lambda_i^{-1}q_i^s, \lambda_i^{-1}q_i^t) \lambda_i p_i^s}{\sum_{i=1}^N \max(\lambda_i^{-1}q_i^s, \lambda_i^{-1}q_i^t) \lambda_i p_i^s} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \max(\lambda_i^{-1}q_i^s, \lambda_i^{-1}q_i^t) \lambda_i p_i^s}{\sum_{i=1}^N \min(\lambda_i^{-1}q_i^s, \lambda_i^{-1}q_i^t) \lambda_i p_i^s}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i^{-1} \min(q_i^s, q_i^t) \lambda_i p_i^s}{\sum_{i=1}^N \lambda_i^{-1} \max(q_i^s, q_i^t) \lambda_i p_i^s} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i^{-1} \max(q_i^s, q_i^t) \lambda_i p_i^s}{\sum_{i=1}^N \lambda_i^{-1} \min(q_i^s, q_i^t) \lambda_i p_i^s}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \min(q_i^s, q_i^t) p_i^s}{\sum_{i=1}^N \max(q_i^s, q_i^t) p_i^s} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \max(q_i^s, q_i^t) p_i^s}{\sum_{i=1}^N \min(q_i^s, q_i^t) p_i^s}} = \\ &= I_B^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \end{aligned} \quad (16)$$

PRZYKŁADY

Przykład 1

Rozważmy agregat składający się z $N = 4$ komponentów, których ceny i ilości w okresie bazowym s i badanym t określają wektory:

$$P^s = [10, 2000, 300, 1000]'; \quad Q^s = [2000, 200, 3000, 5]';$$

$$P^t = [150, 1500, 300, 1300]'; \quad Q^t = [2200, 150, 5000, 7]'$$

Po przeprowadzeniu obliczeń uzyskano następujące wyniki omówionych indeksów cen.

**WARTOŚCI INDEKSÓW CEN DANYCH UMOWNYCH
Z PRZYKŁADU 1**

Formuła indeksu	Wartość indeksu
$I_{Lo}^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \dots\dots\dots$	1,001
$I_{Po}^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \dots\dots\dots$	1,0183
$I_F^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \dots\dots\dots$	1,0096
$I_L^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \dots\dots\dots$	0,6730
$I_U^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \dots\dots\dots$	1,52249
$I_B^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t) \dots\dots\dots$	1,0122

Ź r ó d ł o: obliczenia własne w Mathematica 6.0.

Widać, iż w przypadku braku ekstremalnych zmian cen bądź ilości komponentów w porównywanych okresach różnice wskazań pomiędzy indeksem Fishera² a proponowanym indeksem I_B^P są znikome (wartości pogrubione w tabeli).

Przykład 2

Rozważmy teraz sytuację, w której dane uzupełniamy o parametr rzeczywisty a , determinujący skalę różnic cen i ilości w porównywanych okresach. Przyjmijmy zatem:

$$P^s = [100, 2000, 300, 1000 + a]'; \quad Q^s = [2000, 200 + a, 3000, 5]';$$

² Indeks Fishera wybrano do porównań ze względu na bardzo dobre własności matematyczne. Często nazywa się go indeksem *idealnym* ze względu na spełniony, bardzo restrykcyjny test odwróconego czasu (Białek, 2005).

$$P^t = [150 + a, 1500 - a, 300 + 2a, 1300 - a]';$$

$$Q^t = [2200 + a, 150, 5000 + 10a, 7 + 0,1a]';$$

gdzie $a \in [0, 200]$. Wartość parametru dobrano tak, aby uwypuklić różnice pomiędzy indeksem Fishera i indeksem proponowanym. Otrzymano krzywą zaprezentowaną na wyk. 1.

Przykład 3

Rozważmy teraz ekstremalną sytuację, gdy zmiany ilości dwóch komponentów w okresie badanym w porównaniu do okresu bazowego są zdecydowanie bardziej dynamiczne niż w przypadku zmian ilości pozostałych dwóch komponentów. Co więcej, te bardziej dynamiczne zmiany dotyczą komponentów, których cena nie uległa zmianie w porównywanych okresach. W ważonych formu-

łach indeksów wagi ustalane są na podstawie ilości, dlatego w przypadku dominującego udziału ilości komponentów o niezmienniającej się cenie wartość indeksu cen powinna oscylować wokół jedności.

Tymczasem przyjmując:

$$\begin{aligned}P^s &= [100, 2000, 300, 1000]'; & Q^s &= [2000, 200 + a, 3000, 5]'; \\P^t &= [100, 1500, 300, 1300]'; & Q^t &= [2200 + a^3, 150, 5000 + a^3, 7 + a]', \\a &\in [0, 500],\end{aligned}$$

otrzymano w rezultacie anomalne zachowanie indeksu Fishera i poprawne indeksu I_B^P (wykr. 2).

Wnioski

Z twierdzenia 1 wynika, iż formuła indeksu $I_B^P(Q^s, Q^t, P^s, P^t)$ określona wzorem (6) jest skonstruowana poprawnie z aksjomatycznego punktu widzenia. Indeks ten spełnia podstawowe testy wymienione chociażby w systemie minimalnych wymagań Martiniego (1992) oraz, podobnie jak indeks Fishera, restrykcyjny test odwróconego czasu. Analiza danych umownych z przykładów 1—3 pokazuje, iż w typowych przypadkach, gdzie zmiany cen i ilości agregatu nie będą zbyt gwałtowne w porównywanych okresach, wartości indeksu Fishera i proponowanego są zbliżone. Jednak różnice wskazań tych indeksów będą tym większe, im większe zaburzenia wprowadzimy pomiędzy ceny i ilości dla badanych okresów.

dr Jacek Białek — Uniwersytet Łódzki

LITERATURA

- Balk M. (1995), *Axiomatic price index theory: a survey*, „International Statistical Review”, No. 63
- Białek J. (2005), *Agregatowy indeks Törnqvista jako alternatywa dla „idealnego” indeksu Fishera*, „Wiadomości Statystyczne” nr 10, GUS
- Białek J. (2006), *The Average Price Dynamics and Indexes of Price Dynamic — Discrete Time Stochastic Model*, Acta Universitatis Lodziensis, „Folia Oeconomica”, No. 196, Łódź
- Białek J. (2007), *The Average Price Dynamics — Continuous Time Deterministic Model*, Acta Universitatis Lodziensis, „Folia Oeconomica”, No. 206, Łódź
- Białek J. (2009), *Propozycja miar dla oceny dynamiki OFE*, [w:] *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '09*, Praca zbiorowa pod redakcją naukową Tadeusza Trzaskalika, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach
- Białek J. (2011), *Analiza efektywności OFE za pomocą modyfikacji miary ADF*, [w:] *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia — tendencje światowe a polski rynek*, red. Krzysztof Jajuga, Wanda Ronka-Chmielowiec, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
- Białek J. (2012), *Zastosowanie statystycznych indeksów łańcuchowych do oceny przeciętnego zwrotu grupy OFE*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu (w druku)

- Crawford A. (1998), *Measurement Biases in the Canadian CPI: An Update*, Bank of Canada Review
- Cunningham A. W. F. (1996), *Measurement biases in price indexes: an application to the UK's RPI*, Bank of England, Working Paper Series 47
- Eichhorn W., Voeller J. (1976), *Theory of the Price Index. Fisher's Test Approach and Generalizations*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag
- Gajek L., Kałuszka M. (2000), *On the average return rate for a group of investment funds*, Acta Universitas Lodziensis, „Folia Oeconomica”, No. 152, Łódź
- Gajek L., Kałuszka M. (2001), *On some properties of the average rate of return — a discrete time stochastic model* (praca nieopublikowana)
- Hałka A., Leszczyńska A. (2011), *Wady i zalety wskaźnika cen towarów i usług konsumpcyjnych — szacunki obciążenia dla Polski*, „Gospodarka Narodowa”, vol. 9
- Krzysztofiak M., Luszniiewicz A. (1997), *Statystyka*, PWE, Warszawa
- Martini M. (1992), *A General Function of Axiomatic Index Numbers*, „Journal of the Italian Statistics Society”, No. 1 (3),
- Olt B. (1996), *Axiom und Struktur in der statistischen Preisindextheorie*, Peter Lang, Frankfurt
- von der Lippe P. (2007), *Index Theory and Price Statistics*, Peter Lang, Frankfurt

SUMMARY

In the article the Author presents and discusses a new price index formula. The paper shows that the proposed formula satisfies basic tests coming from the price index theory. Using some examples the discussed index is compared to the Fisher index.

РЕЗЮМЕ

В статье представляется новая формула индекса цен. Было доказано, что предложенная формула удовлетворяет основные тесты из аксиоматической теории индексов. На примерах сопоставлен предложенный метод с индексом Фишера.